جامعة البعث | امتحان مقرر التحليل١ | الاسم: آ
كلية العلوم | العام الدراسي ٢٠١٦–٢٠١٧ | الرقم: [redacted]

السنة أولى – رياضيات – فصل١

السؤال الأول (٣٠ د): ليكن لدينا السلاسل التالية:

$$S_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1},\ S_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^n}{n!},\ S_3=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{n!},\ S_4=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}$$

والمطلوب: ١) أوجد المنطقة النهائية لتقارب السلسلة الأولى واحسب مجموعها؟
٢) عين نوع تقارب السلسلة الأخيرة واحسب مجموعها؟
٣) ادرس تقارب السلسلتين الثانية والثالثة واحسب المجموع في حال التقارب.

السؤال الثاني [٥٠ د]: ليكن لدينا الدالتين التاليتين:

$$y_1=\arcsin(\cos(1-x))+Sh(\ln x)+x^4+7^x,\quad y_2=\begin{cases}2+\sin\dfrac{(x^3-27)\pi}{9(x^2-9)} & ;\ x<3\\ \arctan(2017)+arc\cot(2017) & ;\ x=3\\ \arctan\left[7^{\frac{1}{x-3}-\frac{1}{\sin(x-3)}}\right] & ;\ x>3\end{cases}$$

و المطلوب:

١) أوجد معادلة المماس للمنحني $z=y_1$ في نقطة فاصلتها $x=1$!

٢) ادرس استمرار الدالة y_2 وحدد نوع نقطة الانقطاع إن وجدت!

٣) اذكر منحنيين من المنحنيات الشهيرة مع الرسم ومعادلة كل منهما

السؤال الثالث [٢٠ د]: ادرس تقارب الجداءين اللانهائيين التاليين

$$P_1=\prod_{n=0}^{\infty}\sin\frac{x}{2^n},\ P_2=\prod_{n=1}^{\infty}\left[3-\left(\frac{n^3+1}{7n^3++n+1}\right)\right],\ P_3=\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}$$

ثم أثبت أن: $P_3=\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$

انتهت الأسئلة

حمص في ٢٠١٧/١/ | مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

د. مصطفى حسن

Scanned by CamScanner

سلم تصحيح امتحان مقرر التحليل1 للسنة الأولى رياضيات-16-17-فصل1

الجواب الأول (30-د): 1) سلسلة القوى- 10-:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}\Rightarrow\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int\frac{1}{1-x}=-\ln|1-x|\ ;|x|<1\Rightarrow$$

$$x=-1\Rightarrow S_{1-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n+1}:a_{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0,\ a_{n}\geq a_{n+1}$$

$$x=1\Rightarrow S_{1-2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\infty\Rightarrow I_{1}=[-1\ ,1\ [.$$

2) نوع التقارب للسلسلة الثانية - 10 -: بما أن السلسلة متناوبة وتحقق شرطي ليبنتز فهي متقاربة وبما أن:

$$S_{4-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^{n}\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}=Ch\pi<\infty$$ فهي سلسلة متقاربة فالتقارب مطلق. ومن جهة

أخرى: $S_{4}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\pi^{2n}}{(2n)!}=\cos\pi=-1$.

3) السلسلة الثالثة - 10 -:

$$S_{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{7^{n}}{n!}=e^{7}.S_{3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n!}=e-1+2e=3e-1.$$

الجواب الثاني [50 د]:

$$y_{1}=\arcsin(\cos(1-x))+Sh(\ln x)+x^{4}+7^{x}\ ,\ y_{2}=\begin{cases}2+\sin\frac{(x^{3}-27)\pi}{9(x^{2}-9)} & ;\ x<3\\ \arctan(2017)+arc\cot(2017) & ;\ x=3\\ \arctan\left[7^{\frac{1}{x-3}-\frac{1}{\sin(x-3)}}\right] & ;x>3\end{cases}$$

1) معادلة المماس-14-: $y_{1}=\frac{\pi}{2}-1+x+Sh(\ln x)+x^{4}+7^{x}$

$$z_{0}=y_{1}(1)=\frac{\pi}{2}+8,\quad z'=y_{1}'=1+\frac{1}{x}Ch(\ln x)+4x^{3}+7^{x}\ln 7\Rightarrow y_{1}'(1)=6+\ln 49$$

$$\Rightarrow z-8-\frac{\pi}{2}=(6+\ln 49)(x-1)\Rightarrow z=(6+\ln 49)x-\ln 49+2+\frac{\pi}{2}$$

د. مصطفى حسن

Scanned by CamScanner

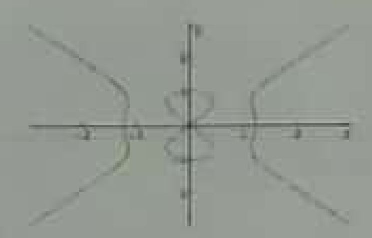
2) استمرار الدالة $y_2(x)$ -20- الدالة مستمرة لأنها تركيب دوال مستمرة ولكن في النقطة $x = 3$ نجد.

$$\lim_{x\to 3} y_2 = 3\,,\quad \lim_{x\to 3} y_2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \neq y_2(3) = \frac{\pi}{2}$$

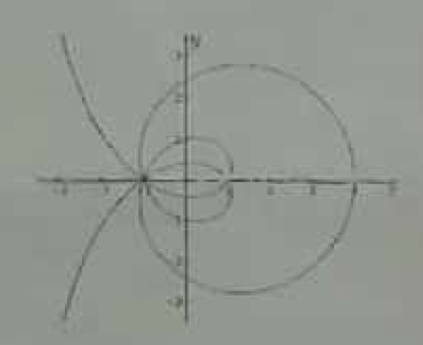
فالدالة مستمرة من اليمين وبما أن كلا النهايتين غير محدودة فنقطة الانقطاع 3 هي من النوع الأول.

(16-8+8): تعطى المعادلة الديكارتية لمنحني الشيطان بالشكل التالي : $y^4 - x^4 + a\,y^2 + b\,x^2 = 0$

يأخذ منحنيه الشكل التالي :



$$x(t) = \frac{a\,\sin(m+n)t}{\sin(m-n)t},\quad y(t) = \frac{2a\,\sin(m)t.\sin(n)t}{\sin(m-n)t}$$ (منحني البلاتيو)



الجواب الثالث [20 =5+5+10د]:

$$P_1 = \prod_{n=0}^{\infty} \sin\frac{x}{2^n};\ a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \neq 1,\ P_2 = \prod_{n=1}^{\infty}\left[3 - \left(\frac{n^3+1}{7n^3 + +n + 1}\right)\right] a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{20}{7} \neq 1$$

الجداء الأول متباعدان لأنهما لايحققان الشرط اللازم أما الثالث:

$$P_3 = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^n}$$

لنشكل متتالية الجداءات الجزئية بالشكل : $P_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$ ولكننا نعلم أن :

د. مصطفى حسن

Scanned by CamScanner

$$\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)=2\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)\Rightarrow\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\frac{\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}$$

وبالتالي نجد أن متتالية الجداءات الجزئية تصبح بالشكل :

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{x}{2^k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^k}\right)}=$$

$$=\frac{\sin x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^2}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{x}{2^2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^3}\right)}\cdots\cdots\frac{\sin\left(\frac{x}{2^{n-2}}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}=\sin x\,\frac{1}{2^n\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}=$$

$$=\frac{\sin x}{x}\,\frac{\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\quad\Rightarrow\quad\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\,\frac{\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}\right)=\frac{\sin x}{x}$$

وبما أن متتالية الجداءات الجزئية متقاربة من $\frac{\sin x}{x}$ فإن الجداء متقارب وقيمته $\frac{\sin x}{x}$.

ومنه: $P_3=\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n}\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}$

<u>انتهت الأجوبة</u>

د. مصطفى حسن

Scanned by CamScanner